SOLVTIO PROBLEMATIS A R. P. MARINO MERSENNO MINIMO PROPOSITI.

Datis tribus quibuſcumq; magnitudinibus, rationalibus vel irrationalibus, datiſque duarum ex illis Logarithmis, tertiæ Logarithmum Geometricè inuenire.

DVO

A proponente de hac Propoſitione pronuntiantur.

VNVM

Quòd forſitan longè difficiliorem quam ipſa Quadratura ſolutionem requirat:

ALTERVM

Quòd Quadratura Circuli à R. P. GREGORIO A S^to^. VINCENTIO exhibita, abeat in illud necdum ſolutum Problema.

Quibus videtur indicare, ſolutionem Problematis de Quadratura Circuli, expeditam fore, ſi defectus ſuppleatur, quem in ſolutione Problematis à ſe propoſiti conſiſtere iudicauit.

AVCTORE

P. ALFONSO ANTONIO DE SARASA SOCIETATIS IESV.





ANTVERPIÆ,
Apud IOANNEM & IACOBVM MEVRSIOS.
ANNO M. DC. XLIX.



PRÆFATIO.



INcidi nuper in Censuram quandam, quam R.P. MARINVS MERSENNVS, libro quem de Reflexionibus Physico-mathematicis inscribit; quâ, de subtilissimo opere R.P. GREGORII A S^to^. VINCENTIO è Societate IESV, quod nuper summâ omnium admiratione applausuque prodiit, quid sentiret, palam euulgauit. Scripto eam amicus quidam comprehensam, huc transmiserat, cum librum ipsum æquè commodè non posset: quam cum quasi temerè abiectam, & veluti neglectam fortè inspicerem, famamque interim incomparabilis in Geometriâ viri viderem si non obteri, saltem apud Geometriæ non adeò peritos aliquousque obscurari, certè non negligenda penitùs res visa tum est, sed digna omnino quam scripto refellerem ego, cùm eam non magni se facere R.P. GREGORIVS satis ostenderet; vt omnibus in eam qui inciderent, fieret manifestum, iniuriâ minimè ferendâ, hominis tam bene de Geometriâ meriti incomparabiles labores, tam indignis modis contemni, ac veluti dilacerari.

Illud tamen vacillantem me, dubitantemque an responsione digna res esset, planè à sententiâ reuocauit, quod cum Geometricæ cuiusdam Propositionis mentionem faceret, à quâ tamen stabilimentum omne, qualiscumque Censura illa petere videbatur, satis officio meo facturus mihi viderer in caussâ Geometricâ, si illa ipsa tantummodo, prout expetitur, solueretur: stare enim sic suum honorem videbam Quadraturæ Circuli, quam R.P. GREGORIVS A S^to^. VINCENTIO, publici iuris fecit, cùm aliam nullam difficultatem ad rem quæ faceret, hoc est Geometricam, in eâ rectè percipiendâ, sibi Mersennus conqueratur obuolutam.

Operæ pretium tamen erit Censoris verba his attexere, vt quam parum Geometricè concepta sit & expressa, in ipso vestibulo, æquus Lector intelligat.

CENSVRA R. P. MARINI MERSENNI

Quam libro Reflexionum Physico-mathematicarum inseruit. Pag.72.

A Nostris autem Phænomenis editis, conatus ingens in inueniendâ Circuli Quadraturâ, labore improbo impensus est, & decem libris explicatus, quo Proportionalitates nouo modo deducuntur: quippe non solum rationes similes, sed etiam dissimiles interse comparat. At verò cum neque dederit Quadraturam eo modo quo solet à Geometris expectari, cum in eâ exhibendâ, longè quam ipsa Quadratura difficiliora supponat, vel postulet; neque meminerit vllatenus Geometriæ per Indiuisibilia Eruditissimi Bonauenturæ Cauallerij, quandoquidem primus illam per Indiuisibilia methodum edidit, qui tamen illi præluxisse videtur, nostris Geometris displicuit. Qui prætereà nonnihil in illo opere requirunt, vel arguunt; idq; præsertim quod cum Opus suum Quadraturæ Circuli specioso, superboq; titulo insignierit, nihil tamen quod ad rem faciat, præter id quod eâ in re hactenus inuentum est, protulerit. Quippe in illud abit necdum solutum Problema, quodq; forsitan longè difficiliorem quam ipsa Quadratura solutionem requirit: Datis tribus quibuscumq; magnitudinibus, rationalibus, vel irrationalibus, datisq; duarum ex illis Logarithmis, tertiæ Logarithmum Geometricè inuenire.

Hæc R.P. MARINI MERSENNI sententia, totidem expressa verbis, hoc est singulis, & omnibus. Contemni quidem poterant omnia, quæ totâ Censurâ continentur, imò & contemnuntur à peritis; silere tamen omnino, non videbatur consultum; saltem ad Geometrica responsum oportuit, cum inter multos versentur hodie, quibus silentium ipsum, erroris deprehensi videtur esse, tacita quidem, sed indubitata confessio.

Conabimur igitur ad Problema Propositum respondere, illudque supplere quod ad absolutam circuli dimensionem Mersennus deesse suspicabatur: & hac occasione quorundam dubiis faciemus satis, quibus aliquæ propositiones Quadraturam spectantes, obscuriores visæ sunt.

PARS PRIMA.

Expenditur, determinatur, & ſoluitur legitimè determinatum

PROBLEMA

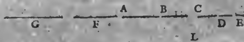
Propoſitum à R. P. Marino Merſennò Minimo.

Datis tribus quibuſcumq; magnitudinibus rationalibus vel irrationalibus, datiſque duarum ex illis Logarithmis, tertiæ Logarithmum Geometricè inuenire.

Logarithmorum ea conditio eùm ſit, vt non niſi ſeriei magnitudinum continuè proportionalium ritè aſſignantur, proinde poſtulat Problema præſens, vt, ſi expoſita ſit quæuis ſeries continuè proportionalium A, B, C, D, &c. in eàque aſſumantur quæuis magnitudines A & C, quarum Logarithmi ſint dati, aſſumatur autem quæuis magnitudo L, Geometricè determinetur, quota ſit L magnitudo in ea ſerie quantitatum in continuâ ratione conſtitutarum, in quâ ſunt magnitudines A & C: determineturque præterea quotæ & illæ ſint in eadem ſerie. Hoc certè ſi præſtiterimus ſolutum erit quod proponebatur.

A B C D
L

Verum illud expendendum eſt imprimis, an Problema prout propoſitum eſt vniuerſim, & illimitatè, rectè problematis nomine indigitari poſſit: nam ſi ἀδύνατον eſſe quoddam in caſu demonſtrauero, euicero certè, non rectè neque Geometricè fuiſſe propoſitum.



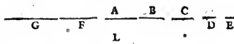
Vt igitur clarè procedamus, percipiamurque, exponatur ſeries aliqua quantitatum quæ ſint in eadem analogia A, B, C, ſupponamuſque eam progreſſionem vtrimque promoueri, ſcilicet per diminutionem quantitatum in terminis D, E, &c. & per incrementum eiuſdem ſeriei per terminos F, G, &c. exponaturq; quæuis quantitas L. De hac magnitudine L plura quæri poſſunt, ac illud imprimis

Primò. An illa ſit vna è numero magnitudinum quæ ſunt in progreſſione ſeriei expoſitæ rationis G ad F, ſiue an ratio G ad L ſit aliquoties multiplicata, v.g. triplicata, quintuplicata, centuplicata rationis G ad F, aut F ad G, ſi L maior ſit quam G.

Secundò. An aliæ ſeries magnitudinum poſſint exhiberi, quæ ſingulas harum quantitatum quæ ſunt in ſerie A, B, C, aut G, F, A, &c. contineant, ſic vt ratio A ad B, item B ad C, &c. ſit duplicata, quintuplicata, centuplicata, &c. rationis quam habet prima ad ſecundam alterius ſeriei intermediæ.

Tertiò. An poſito quod quantitas L non contineatur in ſerie A, B, C, poſſit ea reperiri in aliâ quâdam ſerie progreſſionum, quæ totam A, B, C, D ſeriem dicto modo complectatur,

Quartò. An poſito quod quantitas L, in vnâ ſerie progreſſionum harum exhiberi poſſit, in omni ſerie Propoſitâ poſſit reperiri, ſi ita multiplicetur numerus ſerierum in infinitum, vt poſterior ſemper includat ſuperiores.



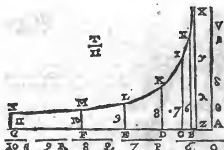
Ex quibus omnibus fiet manifestum, quòd si datæ sint A & C quantitates, earumque Logarithmi, & tertia item data sit L, quæ in serie nullâ esse possit in qua sunt A & C quantitates, quantumcumque series illa extendatur aut dimidiatur aut multiplicetur (quod fieri posse demonstrabitur) non posse in hoc casu inueniri Logarithmum quantitatis L, ac propterea malè propositum esse Problema. Atque ex hoc ipso limitationem inueniemus, quâ constringi Problema debuerat, sicque in ordinem redactum ad Geometricam constructionem reuocabimus, quod nullis videbatur legibus posse coërceri.

Vt autem hisce quæsitis Geometrico rigore faceremus satis, potissima doctrina Partis quartæ l.7. de Hyperbola, ex Opere Geometrico R. P. Gregorij, repetenda hîc foret; fundamenta enim doctrinæ quę Logarithmos complectitur inibi continentur. Sed quia nimis longum id foret, statui tres quatuorve Propositiones hisce inserere, quæ instituto nostro faciant satis. Demonstrationem ipsam non apponimus breuitatis gratiâ, propositionem ipsam exposuisse contenti: vt quibus ipsum Opus Geometricum R. P. Gregorij ad manum non fuerit, intelligant nihilominus quænam isthic veritas proponatur: sicque demonstrationes nostræ, in quibus illæ citabuntur, clariores euadent, manifestiorque fiet veritas.

PROPOSITIO PRIMA.

DAta quauis serie linearū AB, AC, AD, AE, AF, AG, &c. quę eandē rationem continuent AB ad AC, erigantur ad angulos rectos lineæ AG punctis G, F, E, D, C, B aliæ rectæ nimirum GN, FM, EL, DK, C, I, BH, quæ sint in eadem ratione cum lineis AB, AC, AD, AE, AF, AG.

Dico puncta H, I, K, L, M, N, &c. esse ad Hyperbolam cuius asymptoti sunt AV, AG, quæ ad rectos angulos sibi inuicem eriguntur.



Demonstratio.

PAtet ex 298. lib. de Hyperbola. omnia enim rectangula AH, AI, AK, AL, AM, AN æqualia sunt.

Corol-

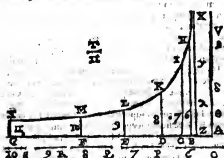
Corollarium.

DAtâ igitur ſerie continuè proportionalium linearum O,P,Q,R,S,T,&c. datiſque lineis A V, A G angulum quemcumque continentibus facilè in lineâ A G inuenientur puncta B, C, D, E, F, G, &c. è quibus eductæ B H, C I, D K, E L. &c. æquales quidem lineis O,P,Q, &c. ſingulæ ſingulis, parallelæ autem ad A V, terminentur ad eandem Hyperbolam, cuius aſymptoti ſint A V, A G. nam ſi ſumantur è lineâ A V rectæ, quæ ſint æquales, T,S,R,Q,P,O. ſcilicet A β, A γ, A δ, A λ, A θ, &c. Deinde linea quæuis A G aſſumatur quæ diuiſa ſit ſecundùm eandem rationem, ſecundùm quàm diuiſa eſt A V in β, γ, δ, λ, θ, ex punctis autem β, γ, δ, λ, θ, ponantur æquidiſtantes rectæ A G, ſimiliter ex punctis B, C, D, E, F, G erigantur lineæ quæ æquidiſtent A V, concurſus harum parallelarum aſsignabunt puncta Hyperbolica H, I, K, L, M, N: eruntque H B, I C, K D, L E, M F, N G, æquales rectis O, P, Q, R, S, T.

PROPOSITIO II.

EAdem figurâ aſſumptâ, ſint rurſus A V, A G aſymptoti hyperbolæ H I K N: & ponantur B H, C I, G N parallelæ aſymptoto A V, auferentes quædam ſegmenta hyperbolica H B C I, I C G N.

Dico quod ratio H B ad I C toties multiplicet rationem I C ad N G, quoties ſuperficies H B C I, (quam commoditatis gratiâ deinceps vocabimus ſuperficiem H C) continet ſuperficiem I G; aut contra ſiue quod idem eſt. Dico quod ratio H B ad I C toties multiplicata ſit rationis I C ad N G, quoties ſuperficies H C continet ſuperficiem I G, aut contra.



DEmonſtrationem vide l. 7. de Hyperb. Prop. 125. & 129. Operis Geometrici.

PROPOSITIO III.

IIſdem poſitis:

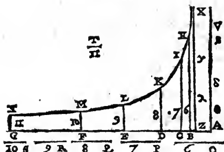
Si lineæ H B, I C, K D, L F, M F, N G, &c. ſiue quod in idem recidit ſi lineæ A B, A C, A D, A E, A F, A G, &c. continuè proportionales fuerint.

Dico ſuperficies omnes hyperbolicas H C, C K, K E, E M, M G, &c. æquales eſſe. Et ſi ſuperficies hyperbolicæ per lineas H B, I C, K D, &c. aſympto-

asymptoto AV parallelas determinatæ, æquales fuerint inter se, dico omnes lineas HB, IC, KD, LE, &c. item & omnes lineas AB, AC, AD, AE, &c. continuè proportionales esse.

DEmonstrationem habes l.7. de Hyperb. Prop.130. sequiturque ex præcedente

Scholion.



SEd quorsum hæc inquies? ambages non quæro, ad Logarithmos te duco, licèt valde disparata videantur hæc à scopo nostro, breuiter igitur eam doctrinam, Logarithmos comprehendere, sic ostendo.

Assumatur rursus eadem figura. Sitque series aliqua magnitudinum O, P, Q, S, T in continuâ analogiâ existentium, quarum Logarithmi sint 6,7,8,9,10. &c. qui quidem numeri eodem semper sese superent excessu, secundum doctrinam Logarithmicam. Assumptâ igitur quâdam hyperbola HIN, cuius asymptoti sint AV, AG, constituantur ad eam lineæ HB, IC, KD, LC, MF, NG, &c. parallelæ quidem ad asymptoton AV, æquales vero lineis O, P, Q, R, S, T singulæ singulis, quod quidem per Corr. primæ huius facile fiet. Erunt igitur per tertiam huius omnes superficies HC, CK, KE, EM, MG æquales inter se. Vnde si continuetur ratio IG ad HB, fiatque eidem proportionalis XZ, eaque per Corr. primæ huius ad eandem hyperbolam constituatur, erit & superficies XB æqualis superficiebus HC, CK, &c. vnde tota superficies hyperbolica XG eodem excessu excedit superficiem hyperbolicam HG, quo superficies hyperbolica HG superat superficiem IG; & rursus superficies hyperbolica IG eodem excessu superat superficiem KG, & sic deinceps. Vnde loco numerorum 6,7,8,9,10,11, &c. qui erant Logarithmi magnitudinum O, P, Q, R, S, T, assumere poterimus quantitates hyperbolicas XG, HG, IG, KG, LG, MG, aut potius MG, LG, KG, IG, HG, XG. aut si hyperbolæ mentionem fieri non vis rationes MF ad NG, LE ad NG, KD ad NG, IC ad NG, HB ad NG, XZ ad NG, cum hæ quantitates, & consequenter rationes, non minùs æquali sese inuicem superent excessu, quàm numeri Logarithmici qui assumpti fuerunt. Quare naturam Logarithmicam cum suâ terminorum continuatione & excessu, vides Hyperbolę ad amussim accommodatam; vt iam loco numerorum, liceat has partes hyperbolicas, aut rationes dictas linearum assumere.

Vt igitur nos accingamus tandem ad solutionem illarum difficultatum, quæ initio fuêre propositæ, sequêtes formo propositiones. Ac primam quidem, in quâ exigua est difficultas, etiam hîc soluere placuit, vt tota materia per hyperbolicas hasce proprietates, quas iam proposui, quasque deinceps persequimur, absoluatur.

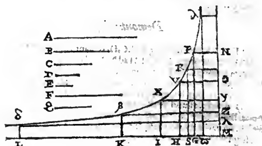
PRO-

PROPOSITIO IV.

Data sit series linearum A,B,C,D,E, &c. continuata secundum rationem A ad B. Data sit insuper quæuis F.

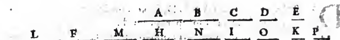
Oporteat ostédere an F exhiberi possit in serie rationis A B C vtrimque si opus fuerit producta, secundum rationem maioris inæqualitatis A ad B, vel minoris B ad C.

Constructio & Demonstratio.



Sit series M G, M H, M I, M K similis seriei E,D,C,B,A: sumptisque M λ, M Z, M O, M N, quæ sint æquales E,D,C,B,A, erigantur G P, H V, I X, K β, L δ parallelæ rectæ M N, quæ concurrant cum rectis N P, O V, Y X, Z β, λ δ quæ æquidistant M L, in punctis P, V, X, β, δ: erunt hæc puncta vt dictum est ad hyperbolam, cuius asymptoti sunt M N, M L: ostendere igitur oportet an F sit in serie A,B,C, D,E, &c. hoc est in serie M N, M O, M Y, M Z, M λ. Fiat rectangulum super F (posito quod N M L angulus sit rectus) & alia recta Q, æquale M P rectangulo: sumpta deinde M S quæ sit æqualis Q, erigatur S R æqualis F parallela M N, erit punctum R ad hyperbolam P β δ, cum M R rectangulum æquale sit M V rectangulo. vel igitur punctum R est inter puncta P, & V, vel est ipsum punctum P, aut V (quod antem dico de P, aut V intellige de quibusuis duobus punctis V X vel β δ, &c.) Quod si medium est punctum R inter P, & V, igitur recta R S, hoc est F, non est assignabilis in tota serie progressionis B,C,D,E. hoc est in serie M O, M Y, M Z, M λ, &c. nam omnes quæ sequuntur V H sunt semper minores quàm sit, V H, cumque R S media ponatur inter P G, V H hinc maior est R S quam V H, & consequenter maior quauis lineâ quæ minor est quã sit V H, quales sunt omnes X I, β K, δ L, &c. si autem continuetur ratio V H ad P G vt sint proportionales V H, P G, λ ϖ, tunc fiet processus à minore ad maiorem. quare cum recta R S minor sit quàm P G multo minor erit quam sit λ ϖ, &c. vnde neque recta R S hoc est F est in serie rationis V H ad P G, & P G ad λ ϖ, &c. manifestum igitur est quod non contineatur F in serie rationis A,B, C,D,E, &c. nisi recta Q hoc est M S æqualis sit vni linearum progresionis M G ad M H.

PROPOSITIO V.



SIt rursus data series continuè proportionalium A,B,C,D,&c. Dico infinitas exhiberi posse series, quarum partes sint lineæ A, B,C,D,&c. sic vt ratio A ad B sit duplicata vel triplicata vel quintuplicata, vel centuplicata, &c. rationis quam habet prima ad secundam alterius seriei exhibitę.

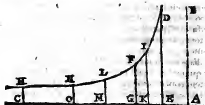
Demonstratio.

SInt lineæ F,H,I,K mediæ inter A,B,C,D, & fiant L,M,N,O,P æquales rectis A,B,C,D,E. eruntigitur L ad M,M ad N,N ad O,hoc est A ad B, B ad C, C ad D in duplicata ratione L ad F, ac propterea A,B,C,D,&c. erunt partes seriei rationis L ad F. Sed eodem modo si ponantur mediæ inter terminos huius seriei L, F,M,H,N,&c. series hæc secunda pars erit seriei illius tertiæ, ac propterea & series A,B,C,D pars erit seriei tertiæ, cum ostensa sit esse pars secundæ. cum autem infinitæ medietates possint assignari inter duos terminos, imò & infinitæ binarię mediæ, ternariæ, quaternarię, &c. patet seriem A,B,C in infinities infinitis seriebus assignari posse cuius sint pars, prout propositum erat demonstrare.

PROPOSITIO VI.

SInt A B, A C asymptoti hyperbolæ D F H, & positæ sint tres lineæ D E, F G, H C quæ æquidistent asymptoto A B auferantque superficies hyperbolicas D G & G H, ita tamen vt ratio superficiei D G ad G H, eam obtineat rationem quam latus quadrati ad suam diametrum, siue vt superficies illæ sint incommensurabiles.

Dico lineam H C non esse in vlla omnino serie in quâ reperiuntur lineæ D E & F G.



Demonstratio.

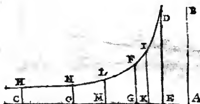
SI enim in aliquâ serie rationum continuè proportionalium sint tres illæ lineæ, ponantur esse in serie rationis D E ad I K, & I K ad F G; F G ad L M; L M ad N O; N O ad H C. itaque cum continuè proportionales sint D E, I K, F G, L M, N O,

N O,H C.per tertiam huius erunt superficies D K, K F, F M, M N, N C inter se æquales,vnde superficies D K communis est mensura superficiei D G, & G H. sed G H superficies posita erat ad superficiem D G vt quadrati latus ad eius diametrum,igitur & numero exponibile est quoties diameter quadrati,latus sui quadrati contineat,adeoque eæ magnitudines sunt commensurabiles; quod est absurdum.non est igitur, H C in serie in qua reperiuntur duæ D E,F G. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Sint denuo vt ante A B, A C asymptoti hyperbolæ D F H; & lineæ D E, F G, H C æquidistantes asymptoto A B intercipiant duas superficies D G, G H commensurabiles.

Dico D E, F G rectas esse in serie alicuius rationis, in quâ potest exhiberi recta H C.



Demonstratio.

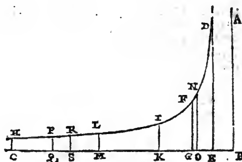
Cum enim D G,G H superficies commensurabiles sint, communem aliquam maximam mensuram habebũt.sit ea superficies O H,determinata per lineam ON parallelam asymptoto A B; quę tertio v.g. contineatur in superficie H G. Itaque per secundam huius ratio F G ad H C,erit triplicata rationis N O ad H C. Sed eadem superficies bis v.g. repetita mensurabat superficiem D G, igitur cum superficies D G bis contineat superficiem O H, etiam ratio D E ad F G, bis continebit rationem N O ad H C; siue quod in idem incidit, ratio D E ad F G, erit duplicata rationis N O ad H C per eandē. sed & eiusdem rationis erat ratio F G ad H C triplicata; ergo ratio D E ad F G duplicata est eius, cuius ratio F G ad H C est triplicata. Itaque cum F G linea vtrique rationi communis sit, manifestum est lineam H C esse in serie rationis in qua sunt lineæ D E, F G, quod erat demonstrandum.

Et id quidem manifestius adhuc apparebit,si per Corr. primæ huius. inter D E & F G constituatur K I media proportionalis quæ ad eandem hyperbolam terminetur.Erit enim ratio D E ad I K vt N O ad H C.Item si tertio continuetur ratio eadem I K ad F G,per rationes F G ad L M,L M ad N O, & N O ad H C,erũt per tertiam huius omnes superficies D K,K F,F M,M N,N C æquales inter se, ac lineæ D E,I K,F G,L M,N O,H C ideo continuè proportionales. manifestum igitur est iterum D E,F G lineas esse in serie in qua est H C,& quidem in serie rationis N O ad H C,siue D E ad I K,quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

POsitis AB,BC hyperbolæ DFH asymptotis; vni eorum constituantur æquidistantes rectæ DE,FG,HC, continentes segmenta commensurabilia DG, GH.

Oporteat horum segmentorum communem maximam mensuram exhibere.



Constructio & Demonstratio.

POnatur minor esse ratio DE ad FG, quam FG ad HC (nam si eadem sit ratio, erunt superficies ambæ æquales per tertiam huius) minor itaque erit superficies DG quam superficies GH per secundam huius. Continuetur ratio DE ad FG quoties potest, intra terminos DE & HC, scilicet faciendo vt DE ad FG, sic FG ad IK, IK ad LM, LM ad HC, idque per Corr. primæ huius. quod si tandem aliqua LM est ad HC vt DE ad FG, tunc superficies ipsa DG est mensura maxima quæ seipsam metitur & superficiem GH, cùm omnes superficies DG, GI, IM, MH æquales sint per tertiam huius.

Quod si verò ratio DE ad FG quantum potest continuata per rationes FG ad IK, IK ad LM inter terminos DE & HC, relinquat rationem LM ad HC minorem quam sit ratio DE ad FG (maiorem enim relinquere non potest, alioquin non esset series rationis DE ad FG continuata quoties continuari potest intra dictos terminos, quod est contra suppositum) tunc vtendo praxi qua Euclid. lib.10. prop.3. inuenit communem mensuram maximam duarum quantitatum commensurabilium, ratio LM ad HC quæ quidem minor est ratione DE ad FG, auferatur quoties potest à ratione DE ad FG, donec relinquat rationem NO ad FG: quæ si æqualis fuerit rationi LM ad HC, erit inuenta superficies NG communis maxima mensura. quod si rursum ratio NO ad FG minor fuerit ratione LM ad HC, auferatur rursus ratio NO ad FG quoties potest à ratione LM ad HC idque semper fiat alternâ detractione, prout Euclides in sua constructione facit, donec tandem relinquatur aliqua vltima PQ ad HC quæ sit vt NO v.g. ad FG. Dico superficiem PC esse mensuram maximam communem superficierum DG, & GH.

Post alternas illas rationum detractiones manserint tandem rationes vltimæ æquales NO ad FG, & PQ ad HC. Cum itaque ratio LM ad PQ multiplicet rationem NO ad FG, sic vt numeris sit exponibile quoties ratio LM ad PQ multiplicet rationem NO ad FG, erit quoque numeris exponibile quoties ratio

tio L M ad H C multiplicet rationem P Q ad H C. Sed rursus numeris erat exponibile quoties ratio D E ad N O multiplicaret rationem L M ad H C; igitur & numeris exponi potest, quoties ratio D E ad N O multiplicet rationem P Q ad H C. itaq; cũ ratio N O ad F G æqualis sit rationi P Q ad H C ex suppofito, etiam in numeris exponetur, quoties ratio D E ad F G multiplicet rationem P Q ad H C. igitur exponi poteſt per numeros, quoties superficies D G contineat superficiem Q H, per secundam huius; ac propterea superficies Q H metitur superficiem D G. Iam vero quoniam superficies F K, K L, L Q æquales sunt singulę superficiei D G per tertiam huius, cum ex constr. ratio D E ad F G continuata sit per rationes F G ad I K, I K ad L M, L M ad P Q; etiam ergo superficies Q H metietur totam superficiem G P: sed & superficies Q H metitur seipsam, igitur superficies Q H, totam superficiem G H metitur. Quod erat primo demonstrandum.

Quod autem superficies Q H sit maxima mensura superficierum D G, G H, sic quidem ostendetur. Si enim superficies Q H non sit maxima communis mensura, ponatur si fieri poteſt maior superficies S H, determinata per lineam S R asymptoto B A parallelam, quæ vtramque commensuret. Igitur superficies H S aliquoties repetita commensurat superficiem G H, vti & superficiem D G. sed & D G superficies aliquoties repetita metiebatur superficiem G L per secundam huius, (nam ex constr. ratio D E ad F G aliquoties continuata, faciebat rationem F G ad L M) igitur & H S superficies commensurat superficiem G L. sed & eadem superficies H S mensurabat superficiem G H, igitur eadẽ superficies H S aliquoties repetita, mensurat superficiem M H. Sed ratio L M ad H C aliquoties repetita constituebat rationem D E ad N O, igitur per secundam huius, superficies H S aliquoties repetita mensurat superficiem D O. Sed eadem superficies H S mensurabat quoque totam superficiem D G; igitur etiam superficies H S mensurabit superficiem N G, hoc est ex constr. & secunda huius, superficiem H Q, maior minorem, quod est absurdum. Non igitur alia quam H Q superficies est communis maxima mensura superficierum D G, G H, quod secundo loco demonstratum oportuit.

Corollarium primum.

EX his facilè intelliges idem esse petere mensuram maximam communem superficierum D G & G H, quod petere rationem aliquam P Q v.g. ad H C, cuius rationes D E ad F G, & F G ad H C sint aliquoties multiplicatæ.

Corollarium secundum.

HInc etiam manifestum est, quod si ratio nulla reperiri possit per alternam illam rationum detractionem, cuius vtraque ratio D E ad F G, & F G ad H C sit aliquoties multiplicata, superficies D G, G H esse incommensurabiles.

PROPOSITIO IX.

DAtâ serie progressionis A, B, C, D, & quauis magnitudine F, quæ non sit in serie rationis A, B, C, D. determinandum est an in vllâ serie possit reperiri F, cuius seriei pars sit series A, B, C, D.

A
B
C
D
F
C
I
K
M
H
N L
G

Constructio & Demonstratio.

CONstituantur rectæ G H, G I ad angulos rectos, fiatque vt B, ad A, ita G L ad G N: ex punctis autem L & N erigantur L K & N M æquales quidem aut proportionales lineis A & B, parallelæ verò ad G H, erunt per primam huius K, M puncta ad hyperbolam cuius asymptoti sint H G, G I. denique fiat vt F ad A, ita G L ad G I, erectaque I O æquali ipsi F, aut certè quæ ad K L eandem rationem habeat quam F ad K L, parallela autem sit ad G H, erit & O punctum ad eandem hyperbolam.

Dico si superficies K N commensurabilis est superficiei N O, quod F sit in aliquâ serierum in qua tota series A, B, C, D constitui potest vt pars. Si verò superficies K N, N O incommensurabiles sint, in illo casu linea F in nulla serierum inueniri poterit in qua sit series A, B, C, D vt pars. Quod quidem ex præcedentibus est manifestum. Demonstrauimus enim Prop. 7. cum superficies K N, N O commensurabiles sunt, rectas K L, M N esse in aliqua serierum in qua possit exhiberi F. cum verò duæ illæ superficies incommensurabiles sunt inter se, tūc etiam ostensum est Prop. 6. quòd magnitudo O I numquam possit exhiberi in vllâ serierum quæ seriem A, B, C, D contineat. Dedimus autem praxim Prop. 8. & in Coroll. secundo quomodo inuestigari debeat an superficies K N commensurabilis sit superficiei N O. determinatū est igitur an F sit in vlla serie reperibile in qua erit assignare seriem A, B, C, D, quod erat faciendum.

Scholion.

K L M N O P
A B C D
G H I
F

ADmiratione certè dignum videtur, quod datâ progressione seriei A, B, C, D, & magnitudine aliqua F, quòd ea quantitas talis esse possit, vt nescio quo fato, exclusa sit non solum à serie A, B, C, D, sed vt etiam ita excludatur vt in nulla serie inueniri possit, quæ seriem A B C D complectatur vt partē. Nam termini illi A & B, non solum assignari possunt in serie rationis A & B, sed & in serie rationis, cuius ratio A ad B erit duplicata, triplicata, centuplicata, millecuplicata & sic in infinitum per Prop. 5. huius. nam inter A & B, & B, & C, interseri possunt G & H mediæ proportionales, tunc alia series orietur A, G, B, H, C, I, D rationis A ad G, cuius rationis ratio A ad B erit duplicata: item interseri possunt inter A & B duæ mediæ K & L, itē inter B & C duæ mediæ M & N, & tunc orietur series A, K, L, B, M, N, C, &c. rationis A ad K, cuius ratio A ad B erit triplicata, & sic in infinitum

atque

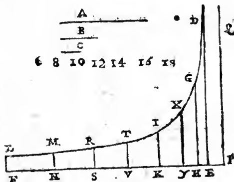
atque adeò stupendum planè quod Geometra sibi persuadere cogatur, dari posse lineam, aliquam determinatam, cui in numero linearum infinities infinitarum in serie continuè proportionalium, dari non possit linea æqualis, etiamsi per totam æternitatem in seriebus semper nouis & nouis eam requisieris; modò prior series semper sit pars nouæ seriei cùm tamen per interpositas medias semper ad datam F magis & magis accedatur. Nihilominus rigor Geometricus, hunc assensum à Geometrâ extorquet.

Atque hinc patet vlteriùs non rectè Ploblema à Mersenno fuisse propositum, *Datis tribus magnitudinibus, datisq; duarum Logarithmis, tertiæ Logarithmum Geometricè Inuenire*; planeque contra naturam Logarithmorum id peti; quod absolutè semper exhiberi non potest: nam cum Logarithmi seriem continuè proportionalium semper supponant, neque quantitatibus affigantur; nisi iis quæ aliquem in aliqua serie locum obtinent, certè perperam petetur Logarithmus eius quantitatis, quæ in nullâ serie esse potest in qua sunt duæ quantitates datæ, quarum Logarithmi sunt dati, talem autem posse esse quantitatem tertiam datam satis superque iam est demonstratum.

Vt igitur legitimo modo propositum sit Problema, conuenienterque ad Logarithmorum naturam & exigentiam, sic illud determinare debuisset, quomodo sequenti propositione determinamus, determinatumque ex dictis soluimus.

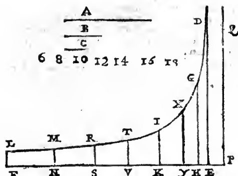
PROPOSITIO X.

Datis tribus magnitudinibus A B C quæ in vnâ eademque serie cōtinuè proportionalium exhiberi possunt, datisq; duarum è tribus magnitudinibus Logarithmis, scilicet A & B, tertiæ C Logarithmum Geometricè assignare.



Constructio & Demonstratio.

Quoniam rationes A B & B C supponũtur esse in vnâ eademq; serie, igitur potest aliqua ratio exhiberi quæ aliquoties per seipsam multiplicata, producat rationem A ad B, & præterea aliquoties etiam per seipsam multiplicata constituat rationem B C: hoc enim proprium est duabus rationibus quæ in eâdem serie sunt constitutæ. Inueniatur itaque per octauam propositionem talis ratio, quæ verbi gratia dicatur esse eadem cùm ratione M N ad L F: eâ habitâ, inquiratur quoties ratio A ad B multiplicet rationem M N ad L F: item quoties ratio B ad C multiplicet eandem rationem M N ad L F: erit itaque vt numerus qui designat quoties

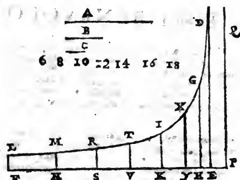


quoties ratio A ad B multiplicat rationem M N ad L F, ad numerum qui significat quoties ratio B ad C multiplicat rationem M N ad L F, ita differentia inter Logarithmos magnitudinum A & B, ad differentiam inter Logarithmos magnitudinum B & C, quare cum tria ex illis quatuor assignata sint, etiam quartum notum esse oportebit.

Exemplo res fiet manifestior si secundùm doctrinam positam ad hyperbolam constituantur rationes A B, & B C.

Sint itaque hyperbolæ asymptoti P Q, P F angulum rectum continentes; & fiat vt B ad A, ita P H ad P K, vtque C ad A, ita P H ad P F, assumptis deinde rectis A B C erigantur orthogonaliter ex punctis H, K, F vt rectæ H G, K I, F L æquales sint lineis A, B, C. Quoniam igitur est P H ad P K, vt K I ad H G, & P K ad P F, vt F L ad K I ex constructione, igitur rectangula P G, P I, P L inter se æqualia sunt, ac proinde puncta G, I, L ad eandem hyperbolam sunt, cuius asymptoti P Q, P F. Ponuntur autem lineæ A, B, C hoc est G H, I K, L F esse in eadem serie alicuius rationis, igitur commensurabiles sunt superficies G K, K L. communem igitur habent mensuram illæ superficies, quæ per octauam inuenta ponatur esse superficies N L, quæ verbi gratiâ quater sumpta nimirum L N, N R, R V, V I adæquet superficiem K L, & bis sumpta adæquet superficiem K G. sunt igitur superficies G Y, Y I, I V, V R, R N, N L æquales inter se, & quia toties ratio G H ad I K multiplicat rationem M N ad L F, quoties superficies G K continet superficiem M F, igitur inuentâ P Y mediâ inter P H & P K, erigatur Y X normalis ad P F, vt sit rectangulum P X æquale P G. erit Y X ad hyperbolam G I L, eritque superficies G Y æqualis Y I superficiei; ac proinde erit superficies X K æqualis M F, & si fiat vt Y P ad H P, ita H P ad P E, erigaturque E D vt rectangulum P D sit æquale P G, erit iterum D ad hyperbolam G I L, & consequenter erunt in continua analogia omnes lineæ D E, G H, X Y, I K, T V, R S, M N, L F, ac proinde superficies illis lineis terminatæ æquales sunt. quare superficies D F eodem excessu superat superficiem G F, quo G F excedit X F, & quo X F excedit I F, & sic consequenter. Vnde hæ superficies supplere possunt locum Logarithmorum datorum quare si Logarithmi dati sunt 6, & 8, erit superficies M F loco Logarithmi 6, & superficies T F loco Logarithmi 10; superficies verò D F Logarithmus est qui inquiritur quantitatis tertiæ. Quia verò perhibentur tria esse data, & quartum inquiritur, assumatur pro primò numerus superficierum æqualium, in quas diuisa est superficies G K. per lineam X Y, qui est 2. Pro secundo sumatur numerus partium æqualium, secundùm quas diuisa est superficies I F, per rectas T V, R S, M N, qui est 4; & pro tertio, sumatur differentia datorum Logarithmorum 6, & 10, quæ est 4, ita diuisa sicut diuisa est superficies G K, scilicet in duas

partes



partes æquales. Quartum igitur requiritur, nempè in numeris interuallum, quòd interiacet inter Logarithmũ B & C: quod quidem hac ratione exhibebitur. Fiat vt numerus partium in quas diuiſa eſt ſuperficies G K, hoc eſt 2, ad numerum partium in quas diuiſa eſt ſuperficies I F, hoc eſt 4, ita differentia Logarithmorum 6, & 10, quæ eſt 4, ad quartum numerũ ſcilicet 8, & diuidatur differentia Logarithmorum A & B, vt eſt diuiſa ſuperficies G K, nempè biſariam in caſu noſtro, & Logarithmus medius inter 6, & 10, repertus ſit 8, habebiturque ſeries Logarithmorum, in quo reperitur Logarithmus qui requiritur, nimirum 18. Nam ſi diuidatur differentia inter 10, & 18, quę eſt 8, ſecundùm numerum 4, quem exhibuit diuiſio ſuperficiei I F in quatuor partes æquales, inuenietur quòd Logarithmus qui quarto loco ſubſequitur Logarithmum ſeriei 8 ad 10, qui eſt 18, ſit ille qui poſtulatus fuit. Solutum igitur eſt Problema, &c.

LECTORI BENEVOLO.



Abes hîc, Erudite Lector, solutionem Problematis à R.P. Marino Mersenno propositi; quod quidem Quadratura ipsa difficiliorem solutionem requirere suspicabatur, & cuius solutione exhibita ipsius quoque quadraturæ solutionem Geometricè expeditam fatebatur. vides autem quàm exactè petitioni eius factum sit satis, cùm & casus, io quo Problema erat ἀδύνατον, determinatus iam sit, designatumque præterea quo casu solui potuerit, ac tandem legitimè propositum, Geometricè, quod petebatur fuerit expeditum.

Fortè quidem non adeo ineptè, nesciet quis cui vsui Problema illud esse possit prout proponitur, ad Dimensionem Circuli absoluendam; verùm vt vt sit, cùm id à Geometris, postulari testetur Censor, operæ pretium existimaui me facturum, si votis eorum hac in parte facere satis. Nam quamuis ad Quadraturam exhibendam cuiquam videri posset minùs conducere, nec admodum in rem nostram facere hoc modo quæ petitur solutio, digna tamen fuit quæ Geometricè expediretur, præsertim cùm sine dubió multorum ingenia torserit id quod quodam in casu, sed iam à nobis determinato, prorsus erat ἀδύνατον. Id ipsum verò cum non nisi ex doctrinâ quam subtilissimo Opere suo Geometrico exposuerat R.P. Gregorius, fuerit deductum, seminaque inibi iam essent iacta, ex quibus solutio etiam illius Problematis, solutique demonstratio poterat, imò debebat fortasis educi, in comperto iam est, nihil etiam ex hac parte defuisse Operi illi prorsus admirando, quod ad perfectam, absolutamque Quadraturæ dimensionem requirebatur. Atque hoc modo Geometricum quod fuit in Censurâ illâ, quodque vnicu videbatur responsione dignum, Geometricè expediuimus.

Ad cetera Censuræ verba quamuis non desit quod respondeam, operæ pretium tamen visum non fuit æquis rerum æstimatoribus quidquam reponere, apud quos præclarissimi Geometræ fama eiusmodi nubeculis obscurari minimè potest: præsertim cum D. Gregorium Nyssenum disertè eleganterque proclamantem audiant, *Dedecus esse viro prudenti, non sanè conuitium audire, sed ea qua dicuntur conuitia retorquere.* Quòd si in prudentem virum cadere non posse iudicet verbis vt altercetur, verbisque verba tantum vt reponat, certè id longè à Religioso homine alienum esse debere potiori iure iudicaui ego, iudicantque illi quorum etiam nutus obseruo, cùm non sine aliquâ charitatis Religiosæ imminutione & dispendio, id ipsum præstari posit, quantumcumque modestè eiusmodi dicta exagitentur.

Adde, quod cùm Geometrica sit hæc res, Geometricèque tantum debuerit expediri, mearum partium planè non sit, imò nec Geometræ vllius, leges à Geometriâ præscriptas vel ad latum vnguem transilire; hoc est, quidquam præter veritatis propositionem, propositæque demonstrationem adferre. Dudum iam nobis limites illos præstantissimus, Antiquitatique notus Geometra Serenus præstitutos esse docuit Præfat. ad Lib. Primum. *Absurdum enim*, inquit, *omnino videtur Geometras de Problemate Geometrico sine demonstratione quidquam affirmare: oratio enim probabilis, & sine vllo artificio, à Geometriâ alienissima est.* Qua propter, ne & ego limites illos transgrediar, perperamque multa de Problemate Geometrico sine demonstratione vllâ affirmantem videar insectari, supersedendum mihi fuit labori illi, neque quidquam in defensionem R.P. Gregorij visum est apponere, cùm eum tam luculenter copiosèque ipsa propugnet, imò & à iudicio Mersenniano planissimè absoluat, vti iam vidimus, quæ Geometris omnibus venerationi esse debet, Antiquitas.

Antiquiorum verò vestigijs inhærere, demonstrationibusque verè Geometricis rem vrgere cùm sibi propositum semper habuerit Auctor, nihil admodum mouetur dictis illis extra rem, hoc est, præter meram Geometriam quæ sunt. *Non enim potest*, vt rectè Seneca, *generosus animus contumeliam pati*: nec sanè pati censendus est, qui non mouetur, neque rectè quidquam pati columnam suâ mole stantem

tem quis existimauerit, si leui perstringatur afflatu, inconcussa cum sit. Manet inconcussa veritas si verbis tantummodò impetatur, præsertim cùm apud veritatis indagatores ingeruntur, eaque in caussâ, in qua non tam dicentis auctoritas, quàm dictorum dilucida exactaque demonstratio, momentum omne pondusque solet adferre, imò assensum, etiam inuitis, extorquere.

Verùm auctoritate etiam agendum si foret, plurima ad manum sunt Geometrarum encomia, quibus præstantissimum virum extulêre iam pridem, quæque non ex Hispaniâ modo, Italiâ. Germaniâ, Angliâ, Daniâ, imò & ex ipsâ Galliâ, ab Opere euulgato, perquam honorifica perscripsêre; eaque his etiam longo apparatu possem inserere, si id viri de se suisque rebus modestissimè sentientis pateretur modestia, insignisque quàm præ se tulit semper, animi submissio.

Neque quis mihi succenseat, auctoritatem ipsius viri tam benè de Geometriâ meriti, hac etiam in caussâ, auctoritate si certandum est, auctoritati si opposuero. Certè vir is est qui à quinquaginta ferè annis indefatigabili planè studio, constantiaque prorsus admirandâ Geometriæ semper incubuit: in Belgio. Austriâ, Bohemia, Romæ à multis iam annis celebratus: Geometriam non scribendo tantùm, sed & docendo ita prouexit, vt discipuli eius non Louanij modò, sed & Dolæ, Monasterij, Pragæ, Græci, Madriti alijsque locis Mathematicas disciplinas cùm laude docuerint, partim doceant etiam hoc tempore: interim modestus adeò, vt cum eum Archimedem alterum alij, alij Apollonium, Magnum Geometram alij litteris inscriptis, & non immeritò passim compellent, id ipsum non sine rubore perlegat: quodque mirandum magis, nequidem illi vt succenseat, qui, vt nonnumquam fit, calculo quantumuis nigro immerentem designarit.

Sed quid hæc affero, cùm res ipsa clamet tacente me? Certè Proportionalitatum liber, vt alium nullum exhibuisset Auctor, eiusmodi visus est summis viris, eosque motus animorum excitauit, vt non tantùm subtilissimi Geometræ ingenium prorsus obstupuerint; sed & plurimum ei Geometriam ipsam debere ingenuè professi sint sæpiùs, vtpote qui illius limites, nouam quasi inauditamque efformando Geometriam, tantopere pronexerit. Cui enim hactenùs in mentem venit de rationibus similibus dissimilibusque perinde disputare, rationumque quinimo rationes, etiam maximè inter se diffidentium, comparare, reducere, augere, detruncare? Id certè ausu ingenti, parique felicitate aggressus est R. P. Gregorius quod alius nemo, Proportionalitatesque primus hoc modo Geometricè exposuit, deduxit, complanauit. Quæ certè eiusmodi rerum Geometricarum æstimatoribus visa iam sunt, vt inter præclara huius sæculi inuenta merito collocarint, iudicarintque inuidiam ipsam viro gloriam detrahere si cupiat, nequidquam cupere.

Quid alia memorem, quæ toto Opere passim occurrunt præclarissima ingenij monumenta, quæque Antiqnitati nihil quidem detrahunt, at nihil cedunt? Certè Progresiones Geometricæ, etiam in infinitum excurrentes, ad Geometricum ab ipso redactæ sunt rigorem, terminisque qnod mirere, etiam conclusæ. Varia ex vario Planorum in Plana ductu nouaque effinguntur corpora, explanantur, cubantur quin imò plurima, pleraque verò ad corpora reducuntur quæ notam habeant basim, altitudinemque notam. Stupendam illam Parabolæ cum Archimedæâ Spirali symbolizationem exprimit, quam primus Geometra hîc adinuenit, & ab annis quatuor & viginti diu tamen antè à se inuentam cum summo Geometrarum applausu Romæ exposuit, quod disertis tunc hac de re conscriptis litteris, testimonijsque planum facere possum cùm opus fuerit: dilucidè autem demonstrat, nullam prorsus ab Archimede Pappoque proprietatem quantumuis abstrusam Spirali competere, (competunt autem planè admirandæ) quæ non suo modo Parabolæ accommodetur; adeò vt Spiralem Archimedæam meritò quis dixerit Parabolam esse euolutam. Vngulæ seu segmenti cuiusdam cylindrici cubationē, imò & superficiei tam exoticæ, vt quæ tota semicirculo semiellipsique clauditur, aream quadrando determinat; imò Vngulæ huius, quod mirabuntur Geometræ, cùm Sphærâ symmetriam, omnimodamque concordiam primus exponit. Sphæroidium, Conoridium item Parabolicorum, Hyperbolicorumque proprie-

 tates

tates præcipuas aperit. Varijs expeditiſque modis Parabolam quadrat, imò & Hyperbolam ipſam intactam hactenùs indomitamque figuram in Quadrum cogit. Iucundiſsimas, abſtruſiſsimaſque Conorum & Conicarum ſectionum (taceo Circulorum, triangulorum, rectangulorum, linearumque) propriĕtates inuenit, demonſtrat, ac demum è Cono ſuo in quo hactenus delituerant, detractas, ad plana deducit, vereque Geometricis terminis tandem concludit. Conicarum verò ſectionum doctrinam, abſtruſam hactenus, & non niſi ſummis Geometris peruiam, exponit adeò dilucidè, vt nullo negotio ſine vllo Apollonij adminiculo, à quouis Geometrâ, non minùs quam ipſa Euclidis elementa percipi rectè poſsint. Quæ certè omnia eiuſmodi quiuis æquus arbiter eſſe indicabit, vt cùm ſummis quibuſuis componi poſsint: & licèt talia eſſe non agnoſcat fortaſsis vnus aliquis, tota certè admiratura iſthæc eſt retro poſteritas, gratulabiturque huic æuo talem quod tulerit Geometram, quem Antiquitas ipſa, etiamſi Quadraturam circuli non attigiſſet quidem, non immeritò ſuum vellet.

Et in his omnibus, quòd magis ſtupeas ne Propoſitionem quidem vnicam ex alienis quaſi hortulis ſtudio excerpſit, (excerpſit autem admodum paucas) quàm non immutatâ demonſtratione, aut ſi Problema foret etiam conſtructione variatâ, propriam fecerit; eaſque tum quoque laudato Auctoris nomine, Auctori acceptas referat. Studio, inquam, ſi excerpſerit: nam vti limitatum hominis ingenium non eſt, ita plures in eandem veritatem incurrere potuiſſe, non negamus. Lege, ſi placet, quid Pag. 221. ingenuè profiteatur, vbi ſe in Sereni ſpeculationem incidiſſe vidit: ſed ingenuè nimis; cùm plurima iſthic ſint à Sereno non propoſita, omnia verò aliter demonſtrata. Item Lib. 2. ad Prop. 36. cùm eam propoſitionem à Clauio expoſitam, alio tamen quàm ipſe modo expediſſet, diſertis verbis aſſerit ſuam non eſſe, ſed exercitij gratiâ à ſe ſolutam. tum ſubdit: *Neque enim propoſitionem ſtatui meis lucubrationibus interſerere, quàm diuerſi diſcurſus demonſtratione meam non fecero, vel Auctoris nomen in publicum non protulero.* Ne propoſitionem quidem vnicam etiam à ſe aliter demonſtratam, ab alio propoſita modò ſit, ſine Auctoris nomine protrudere ſe velle ait: abſit igitur, vt religioſiſſimum virum dolo malo quis ſuſpicetur nomen illius ſuppreſſurum, ſi ita etiam per vmbram ſeſe haberet res, qui ei nouam ſpeculandi materiam ſuggerendo, facem ad Quadraturæ adyta reſeranda prętuliſset. Non alienis indiget fulcris qui mole ſtat ſuâ; neque alienis ſeſe plumis putidè exornare debet is, cui domi eſt non curta ſuppellex, qua plura etiam volumina poſſet exornare, quemque vita citiùs quam nouæ in Geometriâ veritates, nouaque elucubrandi materia deficient. Quod ſi ex vngue Leo dignoſcitur facilè ex tali opere feliciſsima P. Gregorij inexhauſtaque vena diiudicabitur.

Hæc verò quæ publici iuris iam fecit tanta cum ſint, tamque varia, non mirabitur quis in tantam molem Opus hoc excreuiſſe, cùm ſingulæ, quas paulo antè recenſui, materiæ, iuſtum Volumen ſic quaſi ſolitariè editæ conſtituere potuiſſent, etiamſi ad Quadraturas Circuli nullo modo fuiſſent directæ. Quid autem nocuit ſimul edi? certè argĕtea aureaq; ſuppellex vno in atrio concinnè & ex arte diſpoſita, maiorem intuentibus admirationem ingerit, quàm ſi per partes diſtracta, varijſque in conclauibus videnda proponatur.

Rurſus autem quomodo materiæ illæ hactenus intactæ, aut obſcurius ſaltem propoſitæ Quadraturis rectè adhiberentur, ſic vt Lectorum animis nondum iis ſatis imbutis plenè ſatisfacerent, niſi earum natura penitus eſſet euoluta, enucleateque propoſita? id autem nullo modo fieri potuiſſet, niſi multarum propoſitionum quaſi farragine confarcirentur libri ſinguli. Præambulum quod Libro ſecundò præmittit Auctor ſi placet inſpice, illic conſilij ſui rationem dat. ſic habet. *Præſens liber, quem de Progreſſionibus ſcribimus, omnino neceſſarius eſt ad ſternĕdam viam, quàm inimus Circulo ad quadratum reducendo. Non ita tamen hoc velim intelligas, vt omnes omnino Propoſitiones, quæ in toto eius decurſu reperiuntur, ad eum finem requiri credas, ſed quod ſine vſu huius libri, quoad partes maximè principales, difficulter ad ſcopum peruenire quis poſſit: exigebat autem huius Libri argumentum, ad doctrinæ formam*

mam

mam vel leuiter concinnari, & cognatis materiis exornari, ne fœtum imperfectum ederemus. Idem de sequentibus Libris iudicium ferre dignabere.

Vt clariùs tamen facti rationem exponam, dicam omnia. Geometris scribebantur hæc, quibus non sola Quadratura circuli orexin mouet aut explet. alia namque habet Opus hoc, Dimensione Circuli haud inferiora, vti non semel à multis iam annis vir in Geometricis expeditissimus Christophorus Grienbergerus Societatis Iesu, publicè ore litterisque Romæ professus est: quę præterquam quòd ad Quadraturam manu deducerent, & quasi viam aperirent, non minorem ipsa plausum, quàm Quadratura merebantur, cum ea planè forent ipsius tunc quidem iudicio, nunc autem & plurimorum qui sine partium studio rem, prout est, diiudicant, quæ cum Antiquorum omnium elucubrationibus poterant comparari.

Iam verò quis merito id ægrè ferre potest, Quadraturæ circuli nomen Operi tam admirando fuisse præfixum? Quadraturam certè si dederit, non poterat id sanè modestioribus explicari verbis, imò sat dignis exponi vocibus haudquaquam potest. Eam se dedisse Auctor, cum Opus ederet, planè iudicabat, iudicatque etiam nunc, imò magis quotidie confirmatur in sententiâ, quidquid aliqui fortasse secus, nescio quo scrupulo, sentiant. Vt quid ergo non planè loqueretur, vt quid distorquendo verba, oimiumque mollieodo sententiam, insinuaret dubitare se, quasi causæ suæ vllo modo diffideret?

Quòd si verò etiam theorematicè tantum Dimensionem Circuli absoluisset, ne tum quidem quidquam foret, quod elatiorem esse libri titulum quis posset criminari. Certè Theorema suum Archimedes, quod tribus omnino propositionibus expediuit, Dimensionem Circuli siue Quadraturam indigitauit. neque quisquam id ei à totâ antiquitate vitio vertit. Potuit itaque tres illas propositiones, quæ elegantissimæ licèt sint, solùm Theorema continebant Dimensionem Circuli inscribere Archimedes, non poterit verò R.P. Gregorius subtilissimam illam, totque implicatam propositionibus demonstrandi viam, quâ veluti Ariadnæ filo Theseus alter laberyothum adeò intricatam iogressus est, impeditasque semitas labore improbo, eooatuque plusquam Herculeo explicuit, felicitate autem summâ cuius aperuit, eam inquam non poterit prætenso Quadraturæ titulo Geometris porrigere, ac veluti in manus dare?

Vt vt esset, Quadraturamque problematicè non dedisset Auctor, scio ego sciuntque rem qui excussêre, ipsam Quadraturæ inuestigandæ ratiooem, maiorem apud Geometras admirationem excitasse, quàm ipsa, Archimedææ insistendo viæ, exhibitio Quadraturæ potuisset exprimere; maioremque apud Iudices non præoccupatos partium studio, sibi vt Geometræ subtilissimi famam, existimationemque peperisse, hac methodo quadraturam quod indagarit, quam quod inuenerit inueniri eam potuisse non mirantur Geometræ; hâc verò viâ tam inauditâ, numquamque expectatâ quæri quod potuerit, id enimverò nemo est qui non obtupescat. Delectationi etiam summæ est Geometris videre, aliâ ex parte emersisse veritatem hanc, quæ in Geometriæ latebat fundo, quàm aliâ expectabant emersuram. sic nescio quid iucunditatis afferat, alio effodi thesaurum loco, inuenirique gemmam, quæ alio prorsus, irrito studio nequidquam quærebatur.

Quod si quid interim occurrerit alicui minùs quod placeat minusque quod faciat satis, iudicium certè Geometricum non declinat Auctor; Geometricum modo verè id sit. Vt enim se hominem nouit, ita & nihil humani à se alienum putat. orat quinimo vt scripto typis edito, agitetur potiùs discutiaturque res, quàm vt tacito murmure, per hominum ora volitet nescio quæ fama obscurior, quæ licet non euertat, obnubilat tamen apud horum ignaros, aut apud eos quibus non vacat siogula discutere, obscuratque famam celeberrimi Geometræ. Quòd si quis typorum difficultatem refugiat, litteris certè scriptis, commodissimè confici res tota potest. sufficit autem Geometræ esse, vt gratissimæ sint acceptissimæque, cuiuscumque demum etiam ignoti P. Gregorio litteræ, noui enim humanita-

manitatem facilitatemque viri, fortaſsis enucleabitur ſic magis ipſa veritas, elucidabiturque ſi quid obſcurius, vt in re nouâ fieri aſſolet, occurrerit; pluraque eo pacto in lucem fortaſſe venient, quæ in fundo ignorantiæ, non ſine Geometriæ detrimento latuiſſent. Verùm Geometricè, ſi placet, agatur res, per nudas veritatum propoſitiones, demonſtrationeſque; neque pluribus opus eſt, vbi veritas ſola inquiritur.

Quòd ſi error detegatur, tantum abeſt vt odium paritura ſit Veritas, quòd quidem apud inanis gloriæ futiles captatores, vanoſque locum habet, vt gratias etiam ampliſſimas Benefactori ſuo acturus, habiturusque ſit Auctor: cùm enim ſummum malum quod intellectui poteſt obtingere, ſit error, certè errorem detexiſſe, quod planè eum ſanæ menti eſt detraxiſſe, non poteſt non ſummum eſſe beneficium. atque ita apud æquos Veritatis indagatores, æſtimatoreſque, Veritas amicitiam parit.



PARS

PARS SECVNDA

Quâ Propositionum 5. 6. 7. 8. 12. & 54. Quæ Lib. 10. Operis Geometrici R. P. GREGORII A S^{to}. VINCENTIO CONTINENTVR GENVINVS SENSVS DECLARATVR.

PRÆFATIO.



Votundam ingenia, qui pro studio quo in Quadraturam Circuli ferebantur, sedulo eam & Geometricè examinare voluerunt, veritatemque propositionum, ad calculos reuocare, torserunt Propositiones quædam, quæ in Libro 10. Operis GEOMETRICI R. P. GREGORII occurrere; eæ erant quas modò præfixi, 5. 6. 7. 8. 12. & 54. Quadraturarum vt ita loquar fundamenta & bases. Quæ quidem, vt non dissimulem quod res est, breuissimæ quod sint, obscuriores sunt, neque adeò ad percipiendum faciles; & tamen eiusmodi, vt si vel minimum ab earum mente deflectas, natæ sint in errores haud contemnendos Lectorum animos abducere, prout id nonnullis Geometris reipsâ accidisse comperio. Sed quomodo Auctori in mentem incidisse poterat, non eò modo intelligendas propositiones suas, quem earum natura ferret, aut verborum sensus naturæ rationum, de quibus agitur, accommodatus?

Visum itaque fuit è re esse eum obicem tollere, remque ipsam subtilitate suâ sanè difficilem, & distorto veritatis sensu maleq; percepto magis intricatam, quoad in me erit, paucis complanare, ne cuiquam hac ex parte posthac iniiciatur mora. Neque id à me præsertim attentari quisquam miretur, ægréve ferat: nam licèt Auctor ipse materias illas fusiùs elegantiusque alio quod molitur, vt dixi, volumine, susceperit explicãdas, non videbatur tamen diutiùs expectandum, præsertim cùm hæc sese occasio commodum obtulisset, satisfaciendi eorum desiderio, quibus hàc in parte aliquid, præter data, requiri videbatur.

Pro-

Prodromus erit itaque tractatus hic, & quasi prælusio venturi Operis. Omnium verò quæ deinceps dicturus sum sensum, ex ore Auctoris accepi, & sæpiùs quidem non vno tempore, nec vno modo datâ operâ ab eo expressum; quem vt percipere mihi visus sum, tum denique prout mihi quidem videbantur intelligenda, exposui. Quæ, si Lectori Beneuolo arriserint, dubiisque si fecerint satis, id certè Auctori ipsi acceptum referat: obscuriora verò si forsan fuerint, id mihi omnino adscribi volo, vt qui rem subtillissimam, calamo saltem exprimere, non vsque adeò feliciter potuerim. Fortassis tamen erit qui me intelligat. Propositionem verò ipsam, quàm vnicam pono, si quis prima fronte non perceperit, Corrollaria ipsa sedulo peruestiget, & tum demum patebit feliciterne res fuerit euoluta. Rem itaque prout possumus, ordiamur.

Atque à Propositione quintâ & sextâ in quibus prima, imò vt patebit, vnica erat difficultas, auspicemur.

A :

B C

Prop. 5. ita se habet. *Data sit ratio A ad quamuis aliam quantitatem diuisam in B & C. Dico quod ratio A ad B excedat rationem A ad BC, ratione C ad B.* Propositio verò 6. hanc destruere videtur, quæ sic se habet. *Iisdem positis. Dico rationem A ad B C æquari rationi A ad B, minùs ratione C ad A.*

In his verò propositionibus cùm contradictio primâ fronte appareret, Scholion benè longum adiectum est, in quo & sensus earum exponitur, & contradictio declaratur. Verùm cùm & illud obscurius adhuc visum sit aliquibus, Propositiones has duas, aut potiùs vnicam, nam reuerà in idem incidunt vt mox apparebit, hic exponimus Propositione vnicâ, positamque demonstramus: deinde per Corollaria, ex hac vnicâ propositione deducta, rem totam explicamus. Ex quibus liquido apparebit, quorundam dubia, quæ deinceps exponentur, ex distorto tantùm huius veritatis sensu ortum duxisse; propositionemque ipsam, alium quàm hic eliciamus sensum, habere non debuisse, imò nec potuisse secundùm mentem Auctoris.

PRO-

PROPOSITIO.

Data sit quæuis ratio A ad B C, cuius consequens diuisum sit in B & C.

A	
12	
B	C
2	4

Dico quod ratio A ad B excedat rationem A ad B C, aliquo excessu rationis, quem determinat ratio C ad B, collata ad rationem B C ad B.

Aut vt alijs quidem verbis, sed in idem recidentibus, vtar.

Dico rationem A ad B excedere rationem A ad B C aliquo rationis excessu, qui ad rationem maiorem A ad B, sit vt excessus rationis quo ratio B C ad B excedit rationem B ad B, scilicet vt ratio C ad B est ad rationem B C ad B.

Demonstratio.

Ratio A ad B est ad rationem A ad B C, vt B C linea est ad B, per 7. de Proportionalitatibus P. Gregor. sed vt B C est ad B, ita est ratio B C ad A, ad rationem B ad A, per 2. eiusdem: igitur vt est ratio A ad B ad rationem A ad B C, ita est ratio B C ad A, ad rationem B ad A. Sed ratio B C ad A, superat rationem B ad A, sicut B C superat B, colligitur id ex 114. eiusdem: igitur etiam ratio A ad B, superat rationem A ad B C, sicut B C superat B. sed B C superat B excessu C qui sit v. g. duarum tertiarum totius B C: igitur etiam ratio A ad B superat rationem A ad B C excessu qui sit duarum tertiarum rationis A ad B. Sed duæ tertiæ rationis B C ad B sunt ratio C ad B: igitur ratio A ad B superat rationem A ad B C ratione aliquâ, quæ sit ad rationem A ad B, prout ratio C ad B est ad rationem B C ad B. Quod erat demonstrandum.

Corollarium primum.

Hinc patet primò quomodo errent ij, qui in numeris examinare propositionem hanc dum volunt, hoc modò procedunt.

A	
12	
B	C
2	4

Sit, inquiunt, A 12, B C verò hoc est 6 diuisum in B quod sit 2, & C quod sit 4. Ratio A ad B est sextupla vt 12 ad 2: ratio verò A ad B C est dupla vt 12 ad 6. Excessus autem rationis sextuplæ super duplā est ratio quadrupla. & tamen in propositione iam dicitur quod excessus sit ratio C ad B, hoc est 4 ad 2 quæ est dupla. igitur ratio dupla & quadrupla, eædem sunt rationes. quod manifeste falsum est.

Et hanc quidem tam liquidam demonstrationem putant, quàm vlla in Geometriâ dari possit. Verùm manifestè ostendit se propositionem hanc penitùs non percipere quisquis eam hoc modo numeris applicat, ac propterea nullo modo mirum est tam apertam falsitatem ex eâ perperam intellectâ deduci. Primò enim incommodè rationem A ad B comparatam cum ratione A ad B C vocant sextuplam comparatam cum duplâ. Deinde falsum supponunt dum dicunt excessum quo ratio A ad B excedit rationem A ad B C esse rationem quadruplam. Primum iam deduco, secundum Coroll. sequenti exponam.

Imprimis discrimen est in modo exponendi rationes A ad B, & A ad B C si sumantur absolutè, & si respectiuè ad sese inuicem comparatæ accipiantur. Absolutè enim loquendo ratio A ad B, si ad nullam rationem respectum dicat, est

A
12
B C
2 4

ratio sextupla : hoc est numeri 6 & 1 sunt minimi numeri quibus ratio A ad B exponi potest; vti & ratio A ad BC eodem sensu est dupla; & tamen si relatiuè sumantur hæ rationes ad se inuicem, sunt vt tripla ad simplam. cum enim ratio A ad B ad rationem A ad BC sit vt BC ad B per 7. de Proportional. hoc est vt 6 ad 2, siue vt 3 ad 1, clarum est rationem A ad BC non benè exponi per rationem sextuplam ad duplam, nam hæc ipsa ratio sextupla ad duplam, adhuc in minoribus terminis exponi potest, scilicet quòd sit vt tripla ad simplam. Reducatur itaque hæc ratio 12 ad 2 ad minimos terminos, prodibitq; ratio 6 ad 1. item ratio 12 ad 6, reducatur ad minimos terminos, quorum antecedens sit etiam 6, prodibitque ratio 6 ad 3. erit itaque ratio A ad B ad A ad BC vt $\frac{6}{1}$ ad $\frac{6}{3}$ apparebitque quod illæ rationes ad minimos numeros reductæ, sint vt 3 ad 1. hoc est vt ratio tripla ad simplam.

E
30
D
24
B C
2 4

Manifestius autem apparebit discrimen inter duas has expositiones rationũ, si loco A assumatur quæuis D 24, aut E 30. remanentibus B & C. nam rursus ratio D ad B collata cum ratione D ad BC, aut ratio E ad B collata cum ratione E ad BC, est vt CB ad B per 7. libri de Proportionalitatibus. quapropter semper est ratio tripla collata cum simpla: & tamen si absolutè sumantur, ratio D ad B est ratio duodecupla, ratio verò D ad BC est ratio quadrupla; vti & ratio E ad B est ratio quindecupla, ratio verò E ad BC, est ratio quintupla si absolutè sumantur, nã vt sic, minoribus numeris eæ rationes exponi non possunt. Reducantur autẽ hæ rationes ad numeros minimos cõmune habentes antecedens, vt relatiuè inter se comparatæ, possint exponi iuxta sensum. Propositionis 7. de Proportional. erit ratio D ad B quidem vt 12 ad 1, & ratio D ad BC vt 12 ad 3; quare cum 12 sit commune antecedens, erunt ad se inuicem hæ rationes vt 3 ad 1. Et rursus rationes E ad B, & E ad BC reducantur ad numeros minimos qui commune habeant antecedens, prodibuntque rationes 15 ad 1. & 15 ad 3: quæ rationes cùm rursus inter se sint vt 3 ad 1, patet rursus rationem EB comparatam ad rationem E ad BC esse rationem triplam comparatam cùm simplâ.

Nihil ergo inauditum aut mirum supponit discrimen illud quod statuimus in expositione rationum absolutè aut respectiuè sumptarum, si rectè percipiatur; nam id etiam locum habet, quando inter se comparantur rationes quæ commune habent consequens, quomodo communiter hactenus rationes inter se fuerunt comparatæ. Sit enim ratio L ad N, & ratio M ad N; ratio L ad N est duodecupla absolutè sumpta, vti & ratio M ad N est sextupla: nam ratio L ad N solitariè sumpta minoribus numeris explicari non potest, quam per 12 ad 1, & ratio M ad N non minoribus quàm per 6 ad 1. & tamen si comparetur ratio L ad N ad rationem M ad N, hoc est si rationem quàm habet 12 ad 6 ad minimos terminos reducere velis, dicetur quod ratio L ad N, ad rationem M ad N, sit ratio dupla cõparata cum simpla siue vt 2 ad 1. Eodem modo, ratio quidem A ad B est sextupla, & ratio A ad BC est dupla absolutè sumpta, sed quando inter se conferuntur, easque sic collatas minimis numeris exponere vis, non rectè dices esse rationem sextuplam & duplam; non enim illi sunt numeri minimi, in quibus exponi possunt rationes dictæ, nam

L M
12 6
N
1

A
12
B C
2 4

sextupla

sextupla & dupla cùm rursus inter se sint vt 6 ad 2, minoribus adhuc numeris cōmodius exponi possunt & debent, dicendo quòd sint vt 3 ad 1. Quid autem hæc expositio, reductioque ad minimos terminos commodi afferat mox apparebit.

Atque hoc est mysterium, quòd Lib.10.Operis Geomet.Prop.6. in Scholio assumptum fuit; quod fusius explicare operæ pretium duxi, ne quis latebras putide isthic quæsitas fortasse suspicetur.

Corollarium secundum.

E		
30		
D		
24		
A		
12		
B	C	
2	4	

Patet secundò manifestè excessum ipsum quo ratio A ad B superat rationem A ad B C, quem dixit Prop.5. esse C ad B, etiam non esse absolutum, sed respectiuum; adeoque errare planè eos qui putant excessum quo ratio A ad B superat rationem A ad B C esse rationem quadruplam.

Cùm enim ratio C ad B non tantùm excessus sit rationis A ad B supra rationem A ad B C, sed & rationis D ad B supra rationē D ad B C, imò & excessus cuiuscumque demum E ad eandem B, supra rationem E ad eandem B C; ratio autem C ad B si absolute sumatur semper sit dupla, cuinam vmquam vel leuissimè Geometricis tincto in mentem venire posset, quòd ratio A ad B superet rationem A ad B C excessu C ad B; item quod ratio D ad B superet rationem D ad B C, denique & rationem E ad B superare rationem E ad B C eodem excessu; ac propterea rationes A ad B vel D ad B aut E ad B superare eodem planè excessu absoluto, rationes A ad B C, vel D ad B C, aut E ad B C, singulas singulas: quod tamē dici deberet si excessus C ad B absolutè sumatur. Id autem quàm turpe foret suspicari à Geometrâ subtilissimo pronunciatum esse, res ipsa clamat, cùm falsitatis à minimo quoque Geometrâ argui possit.

Longè aliter intelligenda hæc sunt, prout in Scholio ad Prop.6.Lib.10. Operis Geomet. rectè sunt exposita. quæ si cui obscuriora videantur, hîc expono intelligenda quî sint, prout ea perceperunt ij qui nodum in scirpo non quærunt.

A	
12	
B	C
2	4

Dico igitur, iuxta demonstrata, rationem A ad B superare rationem A ad B C excessu rationis quam determinat ratio C ad B non qualiscumque, sed collata cum ratione C B ad B, vt asserit 5.Prop.lib.10. aut vt 6. eiusdem, quam determinat ratio C ad A relata ad rationem B C ad A: nam reuera hæ duæ propositiones, adeò sibi contrariæ non sunt, vt sint planè identicæ; cùm ratio C ad A ad rationem B C ad A, item ratio C ad B ad rationem B C ad B, sint vt C ad B C per 2.l. de Proportional. cùm consequens singulæ binariæ rationes commune habeant.

Itaque vt clariùs adhuc loquar, si tot partes rationis auferantur à ratione A ad B, quot partes rationis C B ad B aufert ratio C ad B, relinquetur tandem aliqua ratio quæ æqualis sit rationi A ad B C.

In numeris id sic declaratur. Ratio B C ad B sit vt 3 ad 1; & quia ratio A ad B collata cum ratione A ad B C est vt B C ad B, erit etiam ratio A ad B ad rationem A ad B C vt 3 ad 1, seu vt tripla ad simplam. excessus autem quo B C superat B est C, hoc est 4, cum C positum sit 4 & B 2. itaque C est ad B vt 2 ad 1. Iam vero cum ratio C ad B conferri debeat cum ratione B C ad B, hoc est dupla cum triplâ, auferet ratio C ad B duas tertias rationis B C ad B: adeoque & excessus quo ratio A ad B superat rationem A ad B C, erunt duæ tertiæ rationis A ad B.

Non igitur excessus rationis A ad B super rationem A ad B C est ratio quadrupla vt illi volebant, sed sunt quatuor partes rationis A ad B hoc est sextuplæ, quæ æquales sunt duabus tertijs rationis triplæ.

Corollarium tertium.

E
30
H
10
D
24
G
8
A
12
F B C
4 2 4

Patet tertiò quis denique excessus, & quomodo detrahendus sit, etiam in numeris, à ratione A ad B, vt remaneat ratio æqualis rationi A ad BC iuxta sensum propositionis. à ratione enim A ad B, item à ratione D ad B, & à ratione E ad B, detrahendæ sunt duæ tertiæ rationis A ad B, item duæ tertiæ rationis D ad B, denique duæ tertiæ rationis E ad B: quod quidem fiet si A, D, E ita diuidantur vt diuisa est BC in B & C; hoc est, auferantur ab antecedentibus duæ tertiæ, remanebit enim ex ratione A ad B ratio F ad B, hoc est 4 ad 2; item ex ratione D ad B remanebit ratio G ad B, hoc est 8 ad 2. & ex ratione E ad B remanebit ratio H ad B hoc est 10 ad 2, quæ æquales erunt rationibus A ad BC vel D ad BC, aut E ad BC singulæ singulis, vt consideranti clarè patet.

I
M 12
3
K L
2 6

Quod si aliud exemplum exercitij caussa placet; sit ratio I ad KL vt 12 ad 8; sit autem KL diuisum in K 2, & L 6. ratio igitur I ad K ad rationem I ad KL est vt KL ad K, hoc est vt 8 ad 2, siue vt quadrupla ad simplam: excessus autem KL super K est L, 6. ratio autem L ad K siue 3 ad 1, continet tres quartas rationis KL ad K. excessus itaque rationis I ad K super rationem I ad KL, sunt tres quartæ rationis I ad K. itaque auferantur à ratione I ad K tres quartæ, quod fiet si ab I antecedente auferantur tres quartæ scilicet 9, remanebitque M 3, adeoque & ratio M ad K 3 ad 2 quæ æqualis est rationi 12 ad 8.

Corollarium quartum.

A
12
D E F
4 8
B C
2 4

Atque ex hoc Patet quarto eodem modo decrescere rationem A ad B, per ablationem factam ab ipso antecedente A, sicut decrescit per additionem factam ad B consequens: adeoque hæc duo in idem planè recidere, modo in additione ad consequens, & in ablatione ab antecedente, aut contra, proportio seruetur: quod quidem fiet si A ita diuidatur in DE & EF, vt BC diuisum est in B & C, aut contra. Nam sicut si à ratione A ad B auferas duas tertias, quod fiet si A ita diuidatur in E, vt EF sint duæ tertiæ totius A, remanebit ratio DE ad B, æqualis rationi A ad BC: ita si ad B addas C duplum ipsius B, sic vt C sint duæ tertiæ totius BC, erit ratio A ad B per additionem C ad consequens B, diminuta duabus tertijs rationis A ad B. nam ratio A ad BC, per additionem ipsius C, æqualis fit rationi DE ad B, quæ duabus tertiis minor est ratione DF ad B hoc est A ad B: eodem modo sicut ratio DF seu A ad B, per ablationem duarum tertiarum totius DF, scilicet per ablationem EF, redditur diminuta duabus tertijs rationis DF seu A ad B, remanet enim ratio DE ad B.

Tota

Tota itaque hîc diminutio rationis, fit per simplicem additionem ad terminũ consequentem; quod benè notandum est; nam per additionem ad antecedens, augmentatio fit rationum. quo modo enim additur ratio $\frac{4}{1}$ ad $\frac{6}{1}$, nisi augendo 6 per 4 manente consequente inuariato vt fiat $\frac{24}{1}$; eodem modo fiet diminutio rationum, aut diminuendo antecedens, aut certè vt hic fit, per simplicem additionem ad consequens, manente inuariato antecedente.

Atque hæc est doctrina 5. & 6. Prop. l. 10. Operis Geom. quam demonstratiuè certam esse nemo negauerit. Neque quis dicat in terminis sic non fuisse propositam, nam præterquam quod mox in Scholio mentem suam Auctor ipse satis explicaret, alium sensum Propositiones ipsæ admittere non poterant, vti demonstratio ipsa satis indicabat: neque propositiones sese inuicem vt videbatur destruentes, sed reipsa idem dicentes simul iungere, in vllum Geometram, ne dicam in P. Gregorium vmquam cadere potuisset, nisi studio id ipsum fecisset ad explicandum fusius intricatam rem; quod sanè luculenter in Scholio mox præstitit.

Libet tamen ostendere propositionem etiam vt iacet non aliter debuisse intelligi. Cùm enim rationum A ad B, & A ad B C denominatores sint C B, & B, non poterat excessum istarũ rationũ determinare, nisi per excessũ denominatoris B C super denominatorẽ B: excessus autẽ erat C. Iã verò cũ excessus ille C sit antecedens rationis C ad B, illius nempè qua ratio A ad B dicitur excedere rationẽ A ad B C, clarũ erat referendũ excessum illũ ad aliquam rationem cuius pars erat ratio C ad B. illa autem ratio necessariò erat ratio C B ad B, quæ ad rationẽ B ad B, omnino ita se habet, vt ratio A ad B ad rationẽ A ad B C. Patet igitur propositionem 5. & idem est de 6. quæ eadẽ est, prout iacebat, non determinare excessum rationis A ad B super rationẽ A ad B C, nisi per excessum qui respectiuus est modo iam explicato, & non absolutus. Sed quia id obscurius poterat esse, idcirco adiectum Scholion, claritatis, vt dixi caussa, non necessitatis.

	A	
B		C

Verùm ad alias Propositiones gradum faciamus.

Corollarium quintum.

EX his probè intellectis, Patet 5. nullo modo chymericam esse Prop. 7. l. 10. sed veram planeque certam ac Geometrâ dignam. Ea asserit si cõsequens sit diuisum v.g. in B & C, quod ratio A ad B C, sit ratio A ad B, simul cum ratione A ad C. Patet ex dictis. nam per additionem rationis A ad C ad rationem A ad B, fit consequẽs B C maius: ac propterea ratio A ad B C minor est quàm ratio A ad B: & quidem eâ ratione minor, vt iam ostendimus, præc. Coroll. in quâ ratione per additionem C, accrescit consequens B. Vnde quoniam B per additionem C accreuit ad duas tertias, etiam per additionem rationis A ad C ad rationem A ad B, diminuta est ratio A ad B duabus tertijs; sicque ratio A ad B facta est ratio D ad B; quæ ratio eadem est cum ratione A ad B C. quare cõstat assertio.

	A 12.	
D 4		
B 2		C 4

Corollarium sextum.

HInc patet sextò errare eos qui propositionem hanc numeris exponere dum volunt, veram augmentationem rationum faciũt, cùm tamen fieri debeat diminutio rationum, vt propositio ritè exponatur, quod quidem ostendo. Sic enim argumentantur.

Ratio A ad B est sextupla, ratio verò A ad C est tripla: tripla autem addita sextuplæ facit noncuplam & tamen vti patet ratio A ad B C est dupla; chymæricũ igitur, inquiunt, est dicere, quod ratio A ad B C, sit ratio A ad B simul cum ratione A ad C.

	A 12	
B 2		C 4

Sed vt ante præmonui, errant ipsi planè in eo

A

12

B C

2 4

quod rationem A ad B, & A ad C exprimant per rationes $\frac{6}{1}$ & $\frac{3}{1}$: nam assumunt rationes duas quæ commune consequens habēt, scilicet vnitatem, adduntque sibi inuicem antecedentes: additis autem antecedentibus clarum est fieri rationem aliquam maiorem, quam erat altèrutra. In nostro autem casu, ratio A ad B, & ratio A ad C, commune antecedens habent, consequentia verò diuersa: quo casu, per additionem consequentium diminuta redditur alterutra ratio, imò vtraque solitariè sumpta.

Cùm itaque rationes A ad B, & A ad C ad numeros minimos reducere volunt (quod faciunt quando rationem A ad B vocāt sextuplam & rationem A ad C vocant triplam) vt rectè stet exemplum in numeris, prout indicaui in Coroll. 1. reducatur ratio A ad B ad numeros minimos, eritque vt 6 ad 1: & ratio A ad C reducatur ad numeros minimos, quos patitur antecedens 6, prouenietque ratio 6 ad 2. addantur autem duæ consequentes 1 & 2 prouenient 3, fietque ratio 6 ad 3, qualis est ratio A ad BC, 12 ad 6.

Quòd sane verum est: neque ego quidquam hic chymericum, imò ne abstrusum quidem agnósco, nisi fortè quod diminutio rationum quæ fit per additionem consequentium, ignota multis cùm fuerit, occasionem dederit coniungendi rationēm sextuplam cum triplâ per additionem antecedentium. non aduerterint autem hic non fieri augmentationem rationum quæ fit per additionem antecedentium, sed veram esse diminutionem rationum, quæ fit per consequentium additionem, qualem requirit propositio.

Corollarium septimum.

A B

10 8

C D

2 6

HInc rursus Patet septimò rectè etiam propositam esse Propr. 8. lib. 10. Operis Geom. quâ dicitur, quod quando rationis A B ad C D tam antecedens quàm consequens diuisum est in quotcumque, antecedens quidem v.g. in A & B, consequens vero in C & D, quod ratio A B ad C D, sit ratio A ad C, & A ad D, simul cum rationibus B ad C, & B ad D.

Ratio enim A ad C, simul cum ratione A ad D (per quam diminuitur ratio A ad C) est ratio A ad C D, vti iam ostensum est: item ratio B ad C, simul cum ratione B ad D (per quam diminuitur ratio B ad C) est ratio B ad C D. sed ratio A ad C D, adiuncta rationi B ad C D æquatur rationi A B ad C D, cum vtraque ratio idem habeat consequens: igitur ratio A B ad C D, est ratio A ad C, cum ratione A ad D, vna cum rationibus B ad C & B ad D, quod erat demonstrandum.

In numeris id experiri si placet, operare hoc modo. A est ad C vt 5. ad 1, & A est ad D vt 5. ad 3. reducendæ enim sunt rationes illæ ad numeros minimos qui commune habeant antecedens vt ante dixi. Itaque coniunge iam consequentes, 1 & 3. exurgent 4, & ratio A ad C D erit vt 5. ad 4. Item B est ad C vt 4. ad 1 & B est ad D vt 4. ad 3: nam & illæ rationes reducendæ sunt ad numeros minimos commune habentes antecedens: adde, 1. & 3, fient 4, & ratio B ad C D erit vt 4. ad 4. Iam vero quoniam rationes 5. ad 4, & 4. ad 4. commune habent consequens scilicet 4, addantur antecedentes 5. & 4, exurgent 9, rationesque sic sibi inuicem additæ erunt vt 9. ad 4, quæ eadem plane ratio est cum ratione A B ad C D, 18. ad 8.

Ex his omnibus itaque concludo, rem planam esse & apertam, totamque difficultatem ex modo loquendi minus commodo exsurgere, & postea per operationem erroneam intricari. Volunt enim rationes quæ commune habent antecedens, tum quando inter se comparātur vocare rationem triplam & sextuplam, &c. cum tamen tripla & sextupla commune habeant antecedens. ac propterea, quid mirum in earum additione errari, cum antecedentes sibi addi non debeant consequente inuariato, vt fit in additione verâ per quam fit augmentatio rationis, sed consequentes sibi inuicem iungendi sint antecedente inuariato, vt per eam additionem fiat diminutio rationis.

Quo-

Quomodo ergo vocanda erit, inquies, ratio 12. ad 2, comparata cum ratione 12. ad 4? Certe non potest dici sextupla comparata cum triplâ, si in minimis numeris eam comparationem exprimere vis; nam ratio 12. ad 2: ad. rationem 12. ad 4. est vt 4. ad 2, vocandaque esset dupla comparata cum simplâ. Aduerte tamen quod licet ratio 12. ad 2. comparata ad rationem 12. ad 4, vocetur ratio dupla comparata cum simplâ, si tamen rationem 12. ad 2. addere vis rationi 12. ad 4, ac propterea rationem 12. ad 2. reddere diminutam duabus tertijs, non possis duplam rationem addere simplæ, nam tunc sic stabit exemplum $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{1}$, antecedentesque erunt diuersæ & consequens commune; additisque antecedentibus augebitur ratio, verum redigi debet prior ratio ad minimos terminos vt 12. ad 2, ad rationem 6. ad 1; secunda verò ad minimos terminos quos patitur idem antecedens. 6; sicque demum stabit exemplum $\frac{6}{1}$ $\frac{6}{2}$: addanturque consequentes, fient 3, & prodibit ratio 6. ad 3, qualis est 12. ad 6; quæ diminuta est duabus tertijs rationes 12. ad 2.

Corollarium octauum.

A I B E L F
1 3 4 12

C K D G M H
2 4 8 16

Ex hoc Patet 8. veritas Prop. 54. Operis Geomet. l. 10. qua dicitur, si dentur duæ rationes A B ad C D, & E F ad G H, quarum tam antecedentes quàm consequentes diuisæ sint in quotcumque A I, I B; C K, K D; E L, L F; G M, M H; rationem. A B ad C D. esse ad rationem E F ad G H, vt rationes A I ad C K, A I ad K D, I B ad C K, I B ad K D simul sumptæ, sunt ad rationes E L ad G M, E L ad M H, L F ad G M, L F ad M H simul sumptas. Patet inquam, quia rationes quatuor primæ simul sumptæ, siue sibi inuicem additæ eo modo quo dictum est in corr. 7. sunt ipsissima ratio siue constituunt ipsam rationem A B ad C D; similiter ex rationibus, quatuor secundis sibi additis eodem modo constituitur ipsissima ratio E F ad G H.

Atque ex hoc & corrollarium eiusdem propositionis fit manifestum, quod sic se habet.

Si rationum A B ad C D, & E F ad G H partes eædem aut similes rationes fuerint (in idem enim incidit rationes esse similes & easdem vt patet ex l. 8. de Proportional. in opere Geom) tum totæ rationes eædem aut similes erunt. Hoc est si ratio v.g. A I ad C K similis sit rationi E L ad G M, item ratio A I ad K D similis rationi E L ad M H; rursus ratio I B ad C K similis rationi L F ad G M; denique & ratio I B ad K D, similis rationi L F ad M H, etiam tota ratio A B ad C D similis erit rationi E F ad G H, patet ex præcedenti. Atque sic complanata est difficultas quæ in 2, 3, & 4. Quadratura posset occurrere.

Corollarium nonum.

A	B	C	D	
F	G	H	I	
				V
L	M	N	O	
Q	R	S	T	

EX Prop.8.l.10. Oper. Geom. explicatâ & intellectâ prout eam intelligimus hîc in Corrol. 7. Patet 9. quomodo intelligenda sit, & quomodo verum sensum habeat Prop.12. lib. 10. Oper. Geom.

In hâc ostenderat Auctor in casu quē proponit, quādo scilicet sunt quatuor ordines continuè proportionaliū A B C D V, F G H I V, L M N O V, Q R S T V communem habentes vltimam V, quod ratio A ad L, sit duplicata rationis C ad N, & ratio C ad N duplicata sit rationis D ad O: item quod ratio A ad Q duplicata sit rationis C ad S, & ratio C ad S, duplicata rationis D ad T. Item ostenderat quod ratio F ad L duplicata sit rationis H ad N, & ratio H ad N duplicata rationis I ad O; denique quod ratio F ad Q duplicata sit rationis H ad S, & ratio H ad S duplicata rationis I ad T.

A	F	C	H	D	I
L	Q	N	S	O	T

His ita expositis & demonstratis, infert quod ratio tota A F ad L Q toties contineat rationem totam C H ad N S, quoties ratio C H ad N S, continet rationem D I ad O T.

In primo cum non esset difficultas, consequentia tamen hæc vltima visa est difficilis, imò & falsa nonnullis, cum eam in numeris per operationes varias examinare volunt. Verùm quid si non rectè eæ operationes adhibeantur? Nam cum ex Prop.8.lib.10. demonstretur hæc consequentia, certè non alium sensum Prop. hæc 12, eiusque vltima consequentia quam modo posui habere potest, quam ipsa 8. Propositio requirit; alioquin frustra ea ad demonstrationem adhiberetur. Alium vero sensum illi si affingas, quis miretur in falsas consequentias, ex eâ perperam intellectâ quempiam deuolui? Hic igitur genuinus eius propositionis sensus est; aliis verbis in idem recedentibus expositus.

Tota ratio quantitatum A F ad L Q cōstituitur ex rationibus sibi additis iuxta sensum Prop.8. iam explicatum Corr.7. quæ quidem rationes toties multiplicatæ sunt rationum earum qui sibi additæ iuxta sensum Prop.8. constituunt totam rationem quantitatis C H ad N S, quoties rationes illæ constituentes rationem C H ad N S sint multiplicatæ rationum illarum, quæ sibi additæ iuxta sensum Prop.8. constituunt totam rationem quantitatis D I ad O T.

Quod quidem verissimum esse demōstratur ex eadem Prop.8. intellectâ prout eam intelligendam diximus Corr. nostro 7. Nam ratio totius A F ad L Q, constituitur ex rationibus A ad L, A ad Q, F ad L, F ad Q: item tota ratio C H ad N S constituitur ex rationibus C ad N, C ad S, H ad N, H ad S: denique tota ratio D I ad O T, constituitur ex rationibus D ad O, D ad T, I ad O, I ad T. Ostensum autem erat in casu iam posito rationem A ad L esse duplicatam rationis C ad N; rationem verò C ad N duplicatam esse rationis D ad O: item rationem A ad Q duplicatam esse rationis C ad S, & rationem C ad S duplicatam esse rationis D ad T: rursus ostensum rationem F ad L duplicatam esse rationis H ad N, rationem verò H ad N duplicatam rationis I ad O: denique rationem F ad Q duplicatam esse rationis H ad S & rationem H ad S duplicatam esse rationis I ad T. Igitur patet rationem

tionem totam A F ad L Q constitui ex rationibus toties multiplicatis rationum earum, quæ constituunt rationem totam C H ad N S, quoties eæ rationes quæ constituunt rationem totam C H ad N S sunt multiplicatæ rationum, quæ constituunt rationem totam D I ad O T.

Quo posito, cum ratio A F ad L Q non differat à rationibus iis simul sumptis quæ constituunt rationem A F ad L Q per combinationem iam explicatam Corol. 7. quæ vera est detractio simul & additio, idemque verum etiam sit in rationibus C H ad N S, & D I ad O T, patet iam quo sensu verum sit, rationē A F ad L Q toties continere rationem C H ad N S, quoties ratio C H ad N S continet rationem D I ad O T. continet nempè ratio A F ad L Q rationes eas ex quibus constituitur, quæ quidem toties multiplicatę sunt rationum earum quas continet ratio C H ad N S & ex quibus ipsa cōstituitur, quoties rationes quas continet ratio C H ad N S & ex quibus constituitur, multiplicatæ sunt rationum quas continet ratio D I ad O T & ex quibus constituitur.

Corollarium decimum.

A	F	C	H
L		N	
V		X	

HInc Patet 10. eos falli qui existimant in hac propositione dici, aut saltem debere dici, si ratio A ad L sit duplicata rationis C ad N, & rursus si ratio F ad L sit duplicata rationis H ad N, &c. (reliquas combinationes omitto vt verbis parcam) quod etiam ratio A F ad L sit futura duplicata rationis C H ad N: quod tamen nonnulli putantes sine vllo dubio, & absque controuersiâ in hac propositione supponi, falsum id tamen esse in numeris inueniunt, neque errant; falsum id enim verè est, patetque id sine longis ambagibus. Nam vt rationi A ad L quæ duplicata ponitur esse rationis C ad N, addatur adhuc vnâ ratio F ad L, sic vt conflatum ex illis rationibus, scilicet ex ratione A ad L & alterâ illâ ratione adiectâ, duplicatam habeat rationum C ad H & H ad N conflatarum in vnam rationem, debent imprimis rationes C ad N, & H ad N coalescere per multiplicationem: fiat itaque vt H ad N, ita N ad X, eruntque rationes C ad N, & H ad N sibi additæ per multiplicationē, prouenietque ratio C ad X. iam vero cum ratio F ad L posita sit duplicata rationis H ad N, hoc est N ad X, fiat vt F ad L, ita L ad V, erit & ratio L ad V duplicata rationis N ad X, totaque ratio A ad V erit duplicata rationum C ad N & H ad N sibi additarum per multiplicationē per 75. lib. de Proportional. longè autem alia est ratio A F ad L quam A ad V. Quis id ignorat qui in rationum natura aliquomodo est versatus? & id P. Gregorius non animaduerterit, qui rationum scientiam adeò amplificauit vt passim notum est, quique rationibus quibuscumque æquè commodè vtitur ac Euclides lineis?

Caussa itaque quare istæ rationes A L ad F L additæ sibi inuicem prout vult Propos. 12. licèt singulæ duplicatæ sint rationum C ad N, & H ad N, non constituant tamen aliquam rationem A F ad L quæ sit duplicata rationis C H ad N manifesta est, quia rationes A ad L & F ad L non coalescunt per multiplicationem, sed per veram additionem; siue quia non coalescunt istæ rationes vt multiplicatæ sunt rationum C ad N, & H ad N, sed vt rationes simplices sunt. Eodemque modo rationes C ad N & H ad N non coalescunt per multiplicationem, nam vt sic faciunt rationem C ad X vt iam ostensum est; coalescunt autem & rationes C ad N, & H ad N per meram additionem rationum, vt rationes simplices sunt, non autem vt multiplicantur per rationes alias. Imò vt pressius loquar nullâ operatione hic opus est, nam citra vllam additionem extrinsecam, coaluerunt iam rationes C ad N & H ad N in ratione C H ad N, quia reuera ratio C H ad N eas actu continet. idemque est in reliquis rationibus obseruandum.

Rationes porrò A ad L, & F ad L licèt reipsâ duplicatæ sint rationum C ad N, & H ad N singulæ singularum, non tamen vt sic consideratæ mutationem vllam in se accipiunt; quare manet ratio A ad L, & F ad L siue considerentur in ordine

ad rationes C ad N, & H ad N simpliciter vt rationes sunt, siue considerentur vt duplicatæ sunt earundem. Additæ autem hîc considerantur vt simplices rationes sunt, per meram additionem; aut si consequentes etiam diuisæ sint, per meram additionem & detractionem, modo explicato Corrol. 7.

A	F	C	H	D	I
L		N		O	

Quòd si petas quoties ergo ratio A F ad L multiplicata sit rationis C H ad N; respondeo id ad hunc discursum minimè determinari debere, nec requiri: non enim indagatur hîc ratio duorum totorum inter se, sed assumitur tertia quædam ratio D I ad O, quæ cum talis esse reperiatur, vt rationes omnes eam constituentes, toties multiplicentur à rationibus constituentibus rationem C H ad N, quoties rationes hæ multiplicantur à rationibus constituentibus rationem A F ad L, infertur quod ratio A F ad L contineat toties rationes constituentes rationem C H ad N (quæ sunt ipsissima ratio C H ad N) quoties rationes constituentes rationem C H ad N (quæ sunt ipsissima ratio C H ad N) continent rationes constituentes rationem D I ad O, quæ sunt ipsissima ratio D I ad O. Non autem id infertur ex eo quod ratio A F ad L sit duplicata rationis C H ad N, & quia ratio C H ad N duplicata est rationis D I ad O: nam id quidem planè falsum est, nec vmquam assumptum vel per vmbram in discursu P. Gregorij.

Nam ex eò quod ratio A ad L duplicata sit rationis C ad N, & ratio C ad N duplicata rationis D ad O, quid inferes quod rationi A ad L in ordine ad rationem C ad N competat, quod simul etiam competat rationi C ad N in ordine ad rationem D ad O? An quod ratio A ad L toties sit duplicata rationis C ad N, quoties ratio C ad N duplicata est rationis D ad O? hoc autem nihil planè significat. Quid enim est toties esse duplicatam rationem alterius rationis, quoties hæc altera ratio duplicata est cuiusdam tertiæ? Rectè tamen inferes quod ratio A ad L eo casu toties multiplicata sit rationis C ad N, quoties hæc est multiplicata rationis D ad O, quia vtraque alterius est duplicata: & quod ratio F ad L toties sit multiplicata rationis H ad N, quoties hæc est multiplicata rationis I ad O, ob eandem rationē. Quando vero dicitur quòd ratio A F ad L toties contineat rationem C H ad N, quoties hæc ratio continet rationem D I ad O, hoc non infertur vllo modo, ex eo quòd ratio A F ad L sit duplicata rationis C H ad N, & quod ratio C H ad N duplicata sit rationis D I ad O, sed ex eo quòd ratio A F ad L contineat tot rationes ex quibus constituitur, quæ toties multiplicatæ sunt rationum earum quas continet ratio C H ad N, & ex quibus constituitur, quoties eæ rationes quas continet ratio C H ad N, & ex quibus constituitur, multiplicatæ sunt rationum earum quas continet ratio D I ad O & ex quibus constituitur, vt iam sæpiùs dictum. Iuuat enim sæpiùs idem, & diuersis modis aliquando dixisse, vt tandem percipiatur quis sensus sit Auctoris.

Latet hîc quidem alind quoddam mysterium, ex quo ostendere possem rationes has minimè esse posse duplicatas, & tamen verum esse quod toties sint multiplicatę prima secundæ, quoties secunda multiplicata est tertiæ: sed quia longioris id esset discursus, maiorisque moliminis quàm vt libello hoc id explicari possit, visum id fuit omittere: præsertim cùm Auctor ipse in deductione harum materiarum, quam præ manibus habet, id luculenter sit præstiturus.

Corol-

Corollarium vndecimum.

A F C H D I

L N O

EX his Patet 11. errare rursus eos qui ex Prop. 12. putarunt sequi rationes A F ad L, C H ad N, D I ad O esse rationes cōtinuè proportionales. Nã, inquiunt, ratio A F ad L duplicata est rationis C H ad N, & ratio C H ad N, duplicata rationis D I ad O. igitur rationes eæ sunt continuè proportionales. Atque hoc modo rursus Propositionem 12 examinare dum volunt, inueniunt rationes A F ad L, C H ad N, D I ad O non esse continuè proportionales.

Sed quid mirum si ex errorè supposito, veritatem, quam sibi imaginantur sequi debere, non eliciant? Nam imprimis nusquam assumptum est rationem A F ad L duplicatam esse rationis C H ad N; & hanc rursus duplicatam rationis D I ad O. nam hoc falsum esse iam ostendimus.

Deinde vt hoc assumeretur, tamen minimè sequeretur rationes eas esse continuè proportionales. Quod quidem in numeris priùs ostendo, deinde id ipsum Geometricè demonstraturus.

Suppono ex l. de Proportionalitatibus P. Gregorij, si tres continuè proportionales rationes exhibitæ fuerint, rationem mediam in se ductam, idem producere, quod ratio prima ducta in tertiam.

Sit iam A, B, C, D, E ordo quinque proportionalium. Ratio A ad E duplicata est rationis C ad E: ratio autem C ad E duplicata est rationis D ad E. non tamen ideò rationes A ad E, C ad E, D ad E continuè proportionales erunt. quod sic patet.

64	32	16	8	4	2	1
A	B	C	D	E	G	F

Fiat vt C ad E, ita E ad F; tunc ratio C ad E ducta in se producet rationem C ad F. Item ducatur ratio D ad E in rationem A ad E siue fiat vt D ad E ita E ad G; prodibitque ratio A ad G, hoc est B ad F. patet autem rationem B ad F eandem non esse cum ratione C ad F. non igitur sunt rationes A ad E & C ad E, deinde D ad E proportionales, quamuis duplicata sit ratio A ad E rationis C ad E: quemadmodum hæc ipsa ratio C ad E, est duplicata rationis D ad E.

A B C D E

Confirmabitur hoc ipsum simili ferè discursu. Ponantur denuò quãtitates A, B, C, D, E continuare eandem rationem A ad B. erit itaque ratio A ad E duplicata eius quàm habet C ad E: & similiter C ad E duplicata rationis D ad E. cumque habeant tres hæ rationes commune consequens erit ratio A ad E ad rationem C ad E, vt A ad C per propositionem secũdam libri de Proportionalitatibus: & ob eandem causam erit ratio C E ad D E, vt est C ad D. quia verò rationes eædem esse supponuntur propter continuationem, erit ratio A ad C duplicata rationis A ad B, hoc est duplicata C ad D. quare ratio A ad E, C ad E D ad E proportionales non sunt, cum termini A, C, D proportionales esse non possint.

FINIS.